

福建中學
中六級 上學期統測 (2020-2021)
數學 延伸部分 單元二
(一小時十五分鐘)

日期：二零二零年十月二十二日

姓名：_____

時間：上午十時十五分至上午十一時三十分

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部，滿分為45分。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在答題簿中。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。
6. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

參考公式

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$	

- (4 分)

[illegible]

(4 分)

(5 分)

[illegible]

(b) 考慮曲線 $\Gamma: y = x^2 - 8x + 16$ ，其中 $0 \leq x \leq 8$ 。設 R 為 Γ 和直線 $y = 16$ 圍成的區域。

求把 R 繞 y 軸旋轉所得立體的體積。

(6 分)

[illegible]

5. 設 n 為正整數。

(a) 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。計算

(i) A^2 ;

(ii) $A^n \circ$

(b) 設 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 及 $B = SAS^{-1}$ 。

(i) 計算 B^n 。

(ii) 由此，或用其他方法，計算 $(B^{-1})^n$ 。

(7 分)

[illegible]

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features approximately 20 evenly spaced horizontal dashed lines across the entire width of the page. The background is plain white, and there are no margins, text, or other markings present.

乙部 (19 分)

6. 考慮下列實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} x - y - z = \beta \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 2\beta \\ 5x + (\alpha - 2)y + (2\alpha + 3)z = 7\beta \end{cases}, \text{ 其中 } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- (a) 假設 (E) 有唯一解。
- (i) 求 α 值的範圍。
- (ii) 以 α 及 β 表 y 。
- (b) 假設 $\alpha = -5$ 。若 (E) 不相容，求 β 值的範圍。

(7 分)

[illegible]

[illegible]

7.

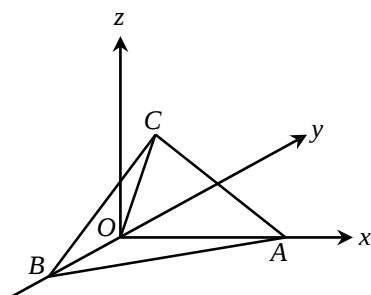


圖 1

圖 1 中， $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i}$ ， $\overrightarrow{OB} = -\mathbf{j}$ 及 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 。R 和 S 分別為直線 AB 和直線 OC 上的兩點使得 $AR:RB = p:(1-p)$ 及 $OS:SC = q:(1-q)$ ，其中 $0 < p < 1$ 及 $0 < q < 1$ 。

(a) (i) 以 p 和 q 表 $\overrightarrow{RS}$ 。

(ii) 若 $RS \perp AB$ 及 $RS \perp OC$ ，求 p 和 q 的值。

(iii) 美玲 宣稱直線 AB 與直線 OC 之間的最短距離小於 $\frac{1}{2}$ 。你是否同意？

試解釋你的答案。

(8 分)

(b) 設 H 為 O 於平面 ABC 上的投影。

(i) 證明存在一正實數 λ 使得

$$\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OA}。$$

(ii) 求 λ 的值。

(ii) 求 $\overrightarrow{OH}$ 。

(4 分)

[illegible]