福建中學
中四級 上學期考試(2020-2021)
數學 延伸部分 單元二
(兩小時)

日期：二零二一年一月十五日 姓名：____________________
時間：上午八時三十分至上午十時三十分 班別：_______ 班號：_____

考生須知：
1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在空位上。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。

參考公式

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$	

甲部 (70 分)

1. (a) 證明 $\tan m\theta + \tan n\theta = \dfrac{\sin(m+n)\theta}{\cos m\theta \cos n\theta}$ 。

   (b) 解方程 $\tan\theta + \tan 2\theta = 0$ ，其中 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ 。

(5 分)

2. 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，

$$\sin x\cos 2x + \sin x\cos 4x + \sin x\cos 6x + \cdots + \sin x\cos 2nx = \frac{1}{2}\sin(2n+1)x - \frac{1}{2}\sin x$$ 。

(5 分)

3. (a) 展開 $\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^5$ 。

(b) 在 $(4+x)^3\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^5$ 的展式中，求 x 的係數。

(5 分)

4. 已知在 $\left[1+\dfrac{2x}{n(n-1)}\right]^n$ 的展式中， x^2 的係數為 $\dfrac{1}{6}$ ，其中 n 為大於 1 的整數。

(a) 求 n 的值。

(b) 求 x^3 的係數。

(6 分)

5. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n， $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 。

(b) 利用(a)部，計算 $\sum_{k=101}^{200} \frac{80\ 601}{(2k-1)(2k+1)}$ 。

(8 分)

6. (a) 證明 $t + 1$ 為 $t^3 - 3t^2 - 3t + 1$ 的因子。

(b) 以 $\tan x$ 表示 $\tan 3x$。

(c) 利用 (a) 及 (b) 部，證明 $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ 。

(8 分)

7. (a) 證明 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$。

圖 1 中，OAB 是三角形，且 $AB = 1$，$\angle OAB = \theta$ 及 $\angle OBA = 3\theta$。OY 是 $\triangle OAB$ 的一條角平分線，且 $AY = x$ 及 $YB = y$。

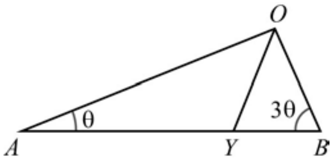

圖 1

(b) 證明 $\dfrac{x}{y} = 3 - 4\sin^2\theta$。

(c) 已知 $0° < \theta < 45°$。求 $\dfrac{x}{y}$ 的取值範圍。

(8 分)

8. (a) 證明 $\dfrac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\cos A\cos B - \sin A\sin B} = \tan(A+B)$。

(b) 不使用計算機，求 $\dfrac{\sin 38°\cos 37° + \cos 38°\sin 37°}{\cos 38°\cos 37° - \sin 38°\sin 37°}$ 的值。

(8 分)

9. (a) 以求和記法表示 $(3-x)^n$ 和 $(-1+x)^n$ 按 x 的升冪序排列的展式，其中 n 為正整數。

(b) 證明 $(3-x)^n+(-1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n(-1)^r[3^{n-r}+(-1)^n]x^r$ 。

(c) 由此，求 $\sum_{r=0}^{100}C_r^{100}(-2)^r(3^{100-r}+1)$ 。

(8 分)

10. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\tan\alpha<0$ 及 $\cot\beta=-2$，求下列各題的值。

(a) $\operatorname{cosec}2\alpha$

(b) $\tan(\alpha-2\beta)$

(9 分)

乙部 (30 分)

11. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sin rx=\frac{\sin\frac{x}{2}+(-1)^{n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cos\frac{x}{2}}$$ ，其中 $\cos\frac{x}{2}\neq 0$。

(b) 由此，證明 $\sum_{r=10}^{33}(-1)^{r+1}\sin\frac{r\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}$。

(9 分)

12. (a) 以數學歸納法，證明對所有正整數 n，$\sum_{r=1}^{n}\frac{r+3}{2^r}=5-\frac{n+5}{2^n}$。

(b) 由此，化簡 $\frac{2n+4}{2^{2n+1}}+\frac{2n+5}{2^{2n+2}}+\frac{2n+6}{2^{2n+3}}+\cdots+\frac{3(n+1)}{8^n}$。

(c) 已知對所有正整數 n，$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=1-\frac{1}{2^n}$。利用 (a) 的結果，化簡 $\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2^j}$。

(12 分)

13. 圖 2 中，ABC 和 CDE 是直線。已知 $\angle BEC = \alpha$， $\angle ADC = \beta$，$AD = BE = y$ 及 $AC \perp CE$。

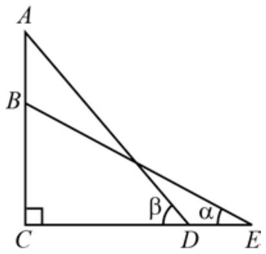

圖 2

(a) (i) 證明 $DE = 2y\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$。

(ii) 證明 $AB = 2y\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$。

(b) 由此，證明 $DE = AB\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$。

(9 分)

— 試卷完 —