

福建中學
中四級 上學期考試(2020-2021)
數學 延伸部分 單元二
(兩小時)

日期：二零二一年一月十五日
時間：上午八時三十分至上午十時三十分

姓名：_____
班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在空位上。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。

參考公式

$\sin (A \pm B)=\sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A+\sin B=2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos (A \pm B)=\cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A-\sin B=2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan (A \pm B)=\frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A+\cos B=2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B=\sin (A+B)+\sin (A-B)$	$\cos A-\cos B=-2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B=\cos (A+B)+\cos (A-B)$	
$2 \sin A \sin B=\cos (A-B)-\cos (A+B)$	

1. (a) 證明 $\tan m\theta + \tan n\theta = \frac{\sin(m+n)\theta}{\cos m\theta \cos n\theta}$ 。

(b) 解方程 $\tan \theta + \tan 2\theta = 0$ ，其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

2. 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ，

$$\sin x \cos 2x + \sin x \cos 4x + \sin x \cos 6x + \cdots + \sin x \cos 2nx = \frac{1}{2} \sin(2n+1)x - \frac{1}{2} \sin x \quad \circ$$

(5 分)

[illegible]

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.

[illegible]

5. (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 。

- (b) 利用(a)部，計算 $\sum_{k=101}^{200} \frac{80\,601}{(2k-1)(2k+1)}$ 。

(8 分)

6. (a) 證明 $t+1$ 為 t^3-3t^2-3t+1 的因子。

- (b) 以 $\tan x$ 表示 $\tan 3x$ 。

- (c) 利用 (a) 及 (b) 部，證明 $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ 。

(8 分)

[illegible]

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of approximately 20 horizontal rows. Each row is defined by two parallel dashed lines, creating a series of uniform gaps for letter height. The lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for consistent letter formation. There is no text or other markings on the page.

[illegible]

- (b) 證明 $(3-x)^n + (-1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n (-1)^r [3^{n-r} + (-1)^n] x^r$ 。

- (c) 由此, 求 $\sum_{r=0}^{100} C_r^{100} (-2)^r (3^{100-r} + 1)$ 。

(8 分)

10. 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha < 0$ 及 $\cot \beta = -2$, 求下列各題的值。

- (b) $\tan (\alpha-2 \beta)$

(9 分)

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sin rx = \frac{\sin \frac{x}{2} + (-1)^{n+1} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \cos \frac{x}{2}}, \text{ 其中 } \cos \frac{x}{2} \neq 0。$$

(b) 由此，證明 $\sum_{r=10}^{33} (-1)^{r+1} \sin \frac{r\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7}$ 。

(9 分)

[illegible]

[illegible]

12. (a) 以數學歸納法，證明對所有正整數 n ， $\sum_{r=1}^n \frac{r+3}{2^r} = 5 - \frac{n+5}{2^n}$ 。
- (b) 由此，化簡 $\frac{2n+4}{2^{2n+1}} + \frac{2n+5}{2^{2n+2}} + \frac{2n+6}{2^{2n+3}} + \cdots + \frac{3(n+1)}{8^n}$ 。
- (c) 已知對所有正整數 n ， $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$ 。利用 (a) 的結果，化簡 $\sum_{j=1}^n \frac{j}{2^j}$ 。

(12 分)

[illegible]

[illegible]

圖 2

(ii) 證明 $AB = 2y \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$ 。

(b) 由此，證明 $DE = AB \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ 。

(9 分)

[illegible]

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, leaving ample room for writing practice. There is no text or other markings on the page.