福建中學
中五級 上學期考試 (2020-2021)
數學 延伸部分 單元一
(兩小時)

日期：二零二一年一月五日 姓名：____________________

時間：上午十時三十分至下午十二時三十分 班別：________ 班號：_____

考生須知 ：

1. 本試卷分兩部分，即甲部(75 分)和乙部(25 分)。

2. 所有試題均須作答。答案須寫在單行紙上。

3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。

5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

甲部 (75 分)

1. 設 X 及 Y 為兩事件。假定 $P(X)=0.4$、$P(Y)=0.33$ 及 $P(Y'|X')=0.7$，其中 X' 及 Y' 分別為 X 及 Y 的互補事件。
   (a) 求 $P(X'\cap Y')$。
   (b) 求 $P(X\cup Y)$。
   (c) X 與 Y 是否獨立？試解釋你的答案。

(6 分)

2. 某舞蹈學校中，20% 的學生是成人，當中 70% 是女性。該校有 30% 的學生是男性。從該校中隨機選出一名學生。
   (a) 求該學生是女性但不是成人的概率。
   (b) 已知該學生是女性，求她不是成人的概率。
   (c) 已知該學生不是成人，求他是男性的概率。

(6 分)

3. 某國家足球隊中，有 10 名球員來自英國聯賽的球會，5 名來自西球牙聯賽的球會，8 名來自德國聯賽的球會。隊中有 3 名守門員，他們均來自英國聯賽的球會。隨機選出 11 名球員 (包括一名守門員) 組成正選陣容。設 X 為正選陣容中來自英國聯賽的球會之球員數目。
   (a) 以表列出 X 的概率分佈。
   (b) 求正選陣容中超過一半球員來自英國聯賽的球會之概率。

(6 分)

4. X 是一個隨機變量，且 $\mathrm{E}(X)=1.6$ 及 $\mathrm{Var}(X)=2.25$。若 $Y=aX+b$，其中 a 和 b 均為整數，則 Y 的期望值和方差分別是 3.4 和 36。
   (a) 求 a 和 b 的值。
   (b) 求 $\mathrm{Var}(bX-a)$ 和 $\mathrm{E}[(bX-a)^2]$。

(6 分)

5. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 k 為常數：

x	6	8	k	16	20
$P(X=x)$	0.2	0.2	0.1	0.2	0.3

   已知 $\mathrm{Var}(X)=3\mathrm{E}(X)-9.05$。
   (a) 求 k 的值。
   (b) 求 $\mathrm{E}(2X-4)$。

(6 分)

6. 已知 m 和 n 均為常數。設 X 和 Y 為兩個獨立的離散隨機變量，它們的概率分佈如下：

$P(X=x)=\dfrac{2x-1}{28}$，其中 $x=m, n, 5, 7$

$P(Y=y)=\dfrac{y}{20}$，其中 $y=2, 3, 4, 5, 6$

假設 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{38}{7}$ 及 $m<n$。

(a) 求 m 和 n 的值。

(b) 設 A 為 $X=Y$ 的事件，B 為 $Y>3$ 的事件。

(i) 求 $P(A\cap B)$。

(ii) A 和 B 是否獨立？試解釋你的答案。

(7 分)

7. 已知 $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ 及 $[P(Y=2)]^2=3P(Y=4)$。

(a) 求 λ 的值。

(b) 求 $P(Y>0)$。

(c) 祖輝宣稱 $P(Y$ 為奇數$)$ 小於 0.4。你是否同意？試解釋如何達至你的答案。

(6 分)

8. 某學校有 45% 的學生配戴眼鏡，而該校共有 3 個課後輔導班，每班有 5 名學生。

(a) 求在所有課後輔導班的學生中最少 3 人配戴眼鏡的概率。

(b) 已知所有課後輔導班的學生中恰有 4 人配戴眼鏡。求每個課後輔導班最少有一名學生配戴眼鏡的概率。

(5 分)

9. 某城市中，$\dfrac{9}{20}$ 的市民是男性。$\dfrac{1}{5}$ 的男性市民和 $\dfrac{2}{5}$ 的女性市民曾參與義工工作。隨機且獨立地訪問 8 名該城市的市民。

(a) 求恰好 5 名受訪者曾參與義工工作的概率。

(b) 已知該 8 名受訪者均曾參與義工工作，求當中恰好 5 人是男性的概率。

(c) 已知該 8 名受訪者均從沒有參與義工工作，求當中恰好 5 人是男性的概率。

(9 分)

10. 某雪糕生產商依 1 : 3 : 4 的比例來生產三款甜筒：甜筒 A、B 及 C。該生產商接獲報告指有一部分在 2019 年 9 月 1 日生產的甜筒受到污染。當天生產的所有甜筒皆須回收並進行檢驗。檢驗顯示 45% 的甜筒 A、42% 的甜筒 B 及 40% 的甜筒 C 均受到污染。

(a) 現從當天生產的甜筒中隨機選出一支甜筒。

(i) 求該支甜筒沒有受到污染的概率。

(ii) 已知選出的甜筒受到污染，求該支甜筒是甜筒 B 的概率。

(b) 現從當天生產的甜筒中隨機選出 10 支甜筒，求其中最少 3 支沒有受到污染的概率。

(6 分)

11. 設 k 為一常數。

(a) (i) 依 x 的升冪次序展開 $e^{2kx}+e^{-2kx}$ 至含 x^2 的項為止。

(ii) 由此，或用其他方法，依 x 的升冪次序展開 $(e^{2kx}+e^{-2kx})^2$ 至含 x^2 的項為止。

(b) 若 $(1-kx)^6(e^{2kx}+e^{-2kx})^2$ 的展開式中 x 的係數與 x^2 的係數之和為 52，求 k 的值。

(6 分)

12. 考慮曲線 C: $y=x\sqrt{x^2+1}+3x$。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。

(b) C 的切線中，有兩條均平行於直線 $26x-3y+7=0$。求該兩切線的方程。

(6 分)

乙部 **(25 分)**

13. 已知每小時進入某停車場的汽車數目依循泊松分佈，其平均值為 5.6。該停車場內設有不同的泊車區，而每個泊車區只能容納 4 輛汽車。
   (a) 求某小時內一個泊車區泊滿汽車的概率。

   (2 分)

   (b) 若第一個泊車區在某小時內泊滿汽車，則第二個泊車區將會立即開放；若第二個泊車區在該小時內亦泊滿汽車，則第三個泊車區將會開放；如此類推。求第三個泊車區在某小時內開放，但第四個泊車區並沒有開放的概率。

   (2 分)

   (c) 已知 80% 進入該停車場的汽車為私家車。
      (i) 求在某小時內，第三個泊車區開放，但第四個泊車區並沒有開放，及每個泊車區內剛好有 4 輛私家車的概率。
      (ii) 求在某小時內，第三個泊車區開放，但第四個泊車區並沒有開放，及每個泊車區內剛好有 3 輛私家車的概率。
      (iii) 已知在某小時內，第三個泊車區開放，但第四個泊車區並沒有開放。求每個泊車區內最少有 3 輛私家車的概率。

   (8 分)

14. 一項研究記錄在不同的溫度下，某湖內螃蟹的數目。該湖內的溫度 P (以 °C 為單位) 可用下式模擬：

$$e^P = \frac{1}{a}e^{kt} \text{ ，}$$

其中 a 及 k 均為常數，且 t $(0 \le t \le 24)$ 為自該研究開始起計所經過的月數。

(a) (i) 將 P 表示為 t 的線性函數。

(ii) 已知這對 t 的線性函數的圖像的斜率及垂直軸上的截距分別為 $0.5\ln 2$ 及 $-\ln 4$。求 a 及 k 的值。

(3 分)

(b) 已知 $P = \ln\left(\frac{20-x}{x}\right)$，其中 x 是以千隻為單位的湖中螃蟹數目。

(i) 證明 $x = \frac{20}{2^{0.5t-2}+1}$ 。

(ii) 證明函數 $x = \frac{20}{2^{0.5t-2}+1}$ 是遞減的。

(iii) 求研究期間湖中螃蟹的最大數目。

(iv) 求 $\frac{d^2x}{dt^2}$。由此，描述 $\frac{dx}{dt}$ 在研究中的首 24 個月期間如何變化。試解釋你的答案。

(10 分)

－ 試卷完 －