

福建中學
中四級 學年考試(2020-2021)
數學 延伸部分 單元一
(兩小時)

日期：二零二一年六月二十二日

姓名：_____

時間：上午八時三十分至上午十時三十分

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部份，即甲部(60分)和乙部(40分)。
2. 所有試題均須作答。答案須寫在答題簿上。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

甲部 (60 分)

1. (a) 依 x 的升幂次序展開 e^{-6x} 到含 x^2 的項為止。

(b) 求 $\frac{(2+x)^5}{e^{6x}}$ 的展式中 x^2 的係數。

(5 分)

2. 解 $6C_2^{n+1} + C_2^n = 534$ 。

(5 分)

3. 已知 $y = e^{kx}$ 且 k 為常數。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 由此，若對於所有實數值 x ， $y = e^{kx}$ 滿足方程 $9\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ ，求 k 的值。

(4 分)

4. (a) 求 $\frac{d}{dx}(xe^x)$ 。

(b) 已知 $\int_0^k xe^x dx = 1$ 。求 k 的值。

(4 分)

5. (a) 求 $\int \frac{x+2}{x^2+4x+9} dx$ 。

(b) 若 $\frac{x^2+5x+11}{x^2+4x+9} \equiv A + \frac{Bx+C}{x^2+4x+9}$ ，求常數 A 、 B 和 C 的值。

(c) 由此，求 $\int \frac{x^2+5x+11}{x^2+4x+9} dx$ 。

(7 分)

6. 對所有 $x > 0$ ，設 $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 。已知 α 及 β 是 $f'(x) = 0$ 的兩根其中 $\alpha > \beta$ 。

(a) 以 e 表 α ，並求 β 。

(b) 利用代換積分法，計算 $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ 。

(7 分)

7. 某種傳染病在某城市散播。該傳染病爆發後 t 日有 N 人受感染。受感染人數的變率可用下式模擬：

$$\frac{dN}{dt} = \frac{79200e^{-2t}}{(1 + 99e^{-2t})^2} \quad (0 \leq t \leq 10)。$$

已知當 $t = 0$ 時， $N = 100$ 。

(a) 試以 t 表示 N 。

(b) 求傳染病爆發後一星期內受感染的人數，答案須準確至最接近的整數。

(6 分)

8. 圖 1 中，曲線 $y = x^2 - 4x + 5$ 與直線 $y = 2x$ 和 $x = 3$ 分別相交於 A 點和 B 點。

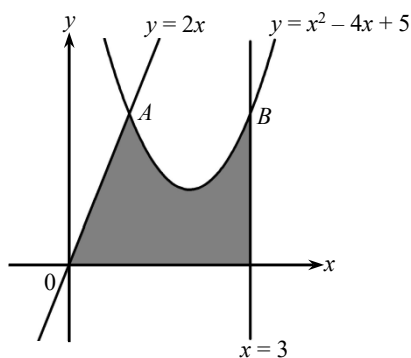


圖 1

(a) 求 A 和 B 的坐標。

(b) 求由曲線 $y = x^2 - 4x + 5$ 、 x 軸及直線 $y = 2x$ 和 $x = 3$ 所圍成的陰影區域的面積。

(6 分)

9. 某博物館館長 文傑 推行一項宣傳計劃，以增加博物館的每週入場人次。他用下式模擬每週的入場人次：

$$N = 10 \ln(t^2 - 4t + 15) + k,$$

其中 N 為在每周末所錄得的入場人次（以百次為單位）， t ($t \geq 0$) 為該計劃開始起計所經過的週數及 k 是常數。文傑 發現該計劃開始時（即 $t = 0$ 時），每週入場人次為 20 百次。

- (a) 求 k 的真確值。
(b) 從該計劃開始起計，每週入場人次經過多少週才與計劃開始時相同？
(c) 求所錄得的最小入場人次。

(8 分)

10. 設 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ ，其中 a 及 b 為常數。 $y = f(x)$ 的圖像通過 $(1, 2)$ 及 $f'(-1) = 4$ 。

- (a) 求 a 及 b 的值。
(b) 求 $y = f(x)$ 的圖像中極大點及極小點。

(8 分)

11. 考慮曲線 $C: y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ 其中 $x > 3$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(2 分)

(b) C 的一條切線通過點 $(8,0)$ ，求這切線的方程。

(6 分)

12. 圖 2 中所示為倒置直立圓錐容器。該容器的底半徑和高度分別為 3 cm 和 9 cm。現以 $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的固定率把水注入該容器中。

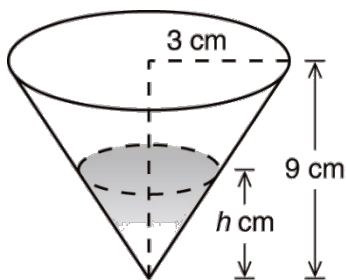


圖 2

(a) 設當水深為 $h \text{ cm}$ 時容器中水的體積為 $V \text{ cm}^3$ 。試以 h 表示 V 。

(3 分)

(b) 當水深為 3 cm 時，

(i) 求水深對時間的變率。

(ii) 求水平面面積對時間的變率。

(5 分)

13. 某會堂正舉行展覽。展覽的首天的入場人數可用下式模擬

$$N = 7 - \frac{6}{1 + \alpha t e^{\beta t}},$$

其中 t ($0 \leq t \leq 12$) 為展覽開場起計所經的時數， α 和 β 是常數。

- (a) 將 $\ln\left(\frac{N-1}{7t-Nt}\right)$ 表為 t 的線性函數。

(2 分)

- (b) 已知在 (a) 中的線性函數的圖像的水平軸上和鉛垂軸上的截距分別為 $\ln 5^{2.5}$ 和 $\ln 5$ 。

(i) 求 α 和 β 。

(ii) 求 N 的最大值。

(iii) 文傑 宣稱 N 的變率在 $t = 0$ 至 $t = 5$ 之間遞減。你是否同意？試解釋你的答案。

(10 分)

14. 設 $P(t)$ (以十億元為單位) 為某有限公司在時間 t 時的資產總額，其中 t 以年為單位， $t \geq 0$ 。某金融分析師用下式模擬 $P(t)$ 的變率：

$$P'(t) = \ln\left(\frac{t+6}{t+1}\right)$$

- (a) 考慮區間 $I = \int_0^4 P'(t) dt$ 。

(i) 利用有 4 個子區間的梯形法則估算 I 。

(ii) 已知 $P(0) = 5$ ，該有限公司的資產總額在 $t = 4$ 時可不可能多於 9.3 十億元？試解釋你的答案如何達至。

(7 分)

- (b) 由於在 $t = 4$ 時的財政危機，該有限公司的資產遭受巨大損失。設 $Q(t)$ (以十億元為單位) 為該有限公司在時間 t 時的資產總額，其中 $t \geq 4$ ，

$$Q(t) = 6e^{\frac{-(t^2+3)}{2(t^2+4t-1)}}。$$

該有限公司的資產總額可不可能多於 5 十億元？試解釋你的答案如何達至。

(5 分)

試卷完