福建中學

FUKIEN SECONDARY SCHOOL

中六畢業試 (2021-2022)

數學延伸部分 單元一

(兩小時三十分鐘)

日期：二零二二年一月二十六日 姓名：_____

時間：上午八時三十分至上午十一時 班別：_____ 班號：_____

考生須知

1. 在適當空格內填上你的姓名、班別及班號。

2. 本試卷分甲、乙**兩部**。甲部佔 50 分，乙部佔 50 分。

3. 甲及乙部各題均須作答，答案須寫在試題答題簿中。不可在各頁邊界以外位置書寫。寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。

5. 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。

甲部(50 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 h 及 k 均為常數。

x	-3	-1	2	4	7
$P(X = x)$	h	0.26	0.47	k	0.03

已知 $E(X) = 1.22$。求

(a) h 及 k，

(b) $E((3X-5)^2)$ 及 $\mathrm{Var}(3X-5)$。

(6 分)

2. 設 A 及 B 為兩事件。將 A 及 B 的互補事件分別記為 A' 及 B'。假定 $P(B|A')=0.4$、$P(A'|B')=1.8P(B)$ 及 $P(A'\cup B')=1.288-P(B)$。

(a) 證明 $P(A')=3P(B)P(B')$。

(b) 求 $P(A')$。

(c) A 與 B 是否獨立？試解釋你的答案。

(6 分)

3. 一拼圖比賽包含兩個階段，I 及 II。玩家於每個階段勝出的概率為 0.8。若玩家於階段 I 未能勝出，他／她得不到任何禮物。若玩家於階段 I 勝出，他／她將進入階段 II。於階段 II 後有一次幸運抽獎。若玩家於階段 II 勝出，他／她在幸運抽獎中得到禮物的概率為 0.8。若玩家於階段 II 未能勝出，他／她在幸運抽獎中得到禮物的概率為 0.1。

(a) 求玩家得不到任何禮物的概率。

(b) 已知玩家得不到任何禮物，求他／她於階段 II 未能勝出的概率。

(c) 求 7 名玩家中恰有 4 名玩家得不到任何禮物的概率。

(6 分)

4. 柏熙游畢 50 m 的所需時間依循一平均值為 48 秒及標準差為 σ 秒的正態分佈。若隨機選出柏熙一次 50 m 的游泳紀錄，其所需時間介乎 45 秒與 51 秒之間的概率為 0.769 8。
   (a) 求 σ。
   (b) 假設隨機選取 16 個柏熙游畢 50 m 的所需時間紀錄組成一樣本。求該樣本中平均所需時間超過 48.9 秒的概率。
   (c) 隨機選取 n 個柏熙游畢 50 m 的所需時間紀錄組成另一個樣本，使該樣本中平均所需時間超過 47.4 秒的概率大於 0.95。求 n 的最小值。

(7 分)

5. 設 c 為一常數。

(a) 依 x 的升冪次序展開 $(3-e^{cx})^2$ 至含 x^2 的項為止。

(b) 若 $(3-e^{cx})^2(1-x)^8$ 的展開式中 x^2 的係數是 x 的係數的兩倍，求 c。

(6分)

6. 考慮曲線 C: $y = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}$。

(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。

(b) C 的一切線通過點 $(-3, 0)$。求這切線的斜率。

(6分)

7. 對所有 $x > -4$，定義 $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+4}$ 。

(a) 證明 $f(x)$ 遞增。

(b) 求 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 。

(c) 求 $y = f(x)$ 的圖像、x 軸與 y 軸圍成的區域的面積之真確值。

(6分)

8. (a) 藉考慮 $\frac{d}{dx}[(2x^2+3x)e^{-2x}]$，求 $\int(2x^2+x)e^{-2x}dx$。

(b) 對所有實數 x，定義 $f(x)=(4x^2+2x+1)e^{-2x}$。設 α 及 β 為方程 $f'(x)=0$ 的兩根，其中 $\alpha>\beta$。求 α 及 β，並以 e 表示 $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$。

(7分)

乙部(50 分)

9. 某場挑戰中，參加者須在一連串的考驗中與電腦競爭。參加者勝出考驗的次數依循一平均值為每場挑戰 2 次的泊松分佈。該參加者在每次考驗的得分依循一平均值為 78.5 分及標準差為 6 分的正態分佈。

(a) 求在某場挑戰中該參加者勝出少於 7 次考驗的概率。

(3 分)

(b) 求某次考驗中該參加者得分高於 80 分的概率。

(2 分)

(c) 若該參加者勝出一次考驗且該次考驗中得分高於 80 分，則該參加者獲得一枚代幣。若在某場挑戰中該參加者獲得多於 3 枚代幣，則在該場挑戰中該參加者會獲頒獎品。

(i) 求在某場挑戰中該參加者勝出恰好 4 次考驗且在該場挑戰中獲頒獎品的概率。

(ii) 若在某場挑戰中該參加者勝出恰好 5 次考驗，求在該場挑戰中該參加者獲頒獎品的概率。

(iii) 已知在某場挑戰中該參加者勝出少於 7 次考驗，求在該場挑戰中該參加者獲頒獎品的概率。

(7 分)

10. 某午餐供應商提供午餐給學校 A。學校 A 的學生投訴食物質素太差劣。因此，學校 A 的校長決定進行午餐改善問卷調查（最低分為 0，最高分為 100）。根據過往經驗，一名隨機選取的學生的評分依循平均值為 μ 及標準差為 16 的正態分佈。

(a) 學校 A 的老師就所收集的評分來估算 μ。

(i) 現隨機選取 16 名學生組成一樣本，他們的評分紀錄如下：

20	25	25	30	35	35	35	40
45	60	60	65	65	80	80	95

求 μ 的 95% 置信區間。

(ii) 求最小樣本容量使 μ 的 95% 置信區間的寬度小於 8 分。

(7 分)

(b) 假設 $\mu = 50$。該午餐供應商會向調查結果低於 42 分的學生贈送一張現金券。

(i) 求該午餐供應商向他所會見的首 8 名學生送出多於 2 張現金券的概率。

(ii) 求第 4 張現金券是贈予該午餐供應商所會見的第 15 名學生的概率。

(6 分)

11. 市鎮 A 中的市民受到某疾病的感染。市鎮 A 中市民的數目（以千為單位）可用下式模擬：

$$N=\frac{32}{4+\alpha te^{\beta t}}\ ,$$

其中 $t(\geq 0)$ 為自該疾病開始擴散起計所經過的日數，且 α 及 β 均為常數。

(a) 將 $\ln\left(\frac{32-4N}{Nt}\right)$ 表為 t 的線性函數。

(2 分)

(b) 已知在 (a) 中所得的線性函數的圖像的水平軸上的截距及斜率分別為 $2\ln 0.05$ 及 -0.5 。

(i) 求 α 及 β 。

(ii) 在該疾病開始擴散起計的某一日，市鎮 A 中市民的數目會否少於 8 千？試解釋你的答案。

(iii) 描述市鎮 A 中市民的數目的變率在該疾病開始擴散後的首 4 日如何變化。試解釋你的答案。

(10 分)

12. 某公司推出新產品。該公司營運成本的變率 (以每月百萬元為單位) 可用下式模擬：

$$A(t)=\ln\sqrt{4t^2+12t+15}\text{，}$$

其中 $t(0\le t\le 6)$ 為自推出新產品起計所經過的月數。將該公司自推出新產品起計首 2 個月的總營運成本記為 α 百萬元。設 α_1 為利用梯形法則將區間分成 4 個子區間對 α 的估計。

(a) (i) 求 α_1。

(ii) 求 $A''(t)$。

(5 分)

(b) 該公司用下式模擬其收入的變率 (以每月百萬元為單位)：

$$B(t)=\frac{10e^{\frac{3}{2}t}}{1+e^{\frac{3}{2}t}}\text{，}$$

其中 $t(0\le t\le 6)$ 為自推出新產品起計所經過的月數。將該公司自推出新產品起計首 2 個月的總盈利記為 β 百萬元。

(i) 求 $\int_0^2 B(t)\,dt$。

(ii) 利用 (a)(i) 及 (b)(i) 的結果，估計 β。

(iii) 該公司宣稱 $\frac{\beta}{\alpha}<3.7$。你是否同意？試解釋你的答案。

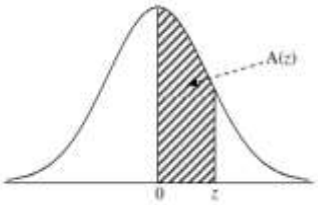
(8 分)

試卷完

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註： 本表所列數字為標準正態曲線下由 $x = 0$ 至 $x = z$ (z 0) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$