



福建中學

FUKIEN SECONDARY SCHOOL

中六畢業試 (2021-2022)

數學 延伸部分 單元二

(兩小時三十分鐘)

日期：二零二二年一月二十八日

時間：上午八時三十分至上午十一時

姓名：_____

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在答題簿中。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。
6. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

參考公式

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$	

1. 設 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+6}}$ 。從基本原理解求 $f'(x)$ 。

(4 分)

This image shows a single page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

(b) 解方程 $\sin 4\theta + \sin 8\theta + \sin 12\theta = 0$ ，其中 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。

(6 分)

[illegible]

5. (a) 利用數學歸納法，證明對於所有正整數 n ， $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{(3n+1)(6n+1)}$ 。
- (b) 利用 (a) 部，計算 $\sum_{k=41}^{90} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} - \sum_{k=81}^{90} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ 。

(7 分)

[illegible]

已知 H 通過點 $P(4, 7)$ 且對所有 $x > 0$, $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x}$ 。

- (a) H 是否有極大或極小點？試解釋你的答案。
 (b) 求 H 的方程。
 (c) 求 H 的拐點。

(7 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$(E): \begin{cases} x - y - z = \beta \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 2\beta \\ 5x + (\alpha - 2)y + (2\alpha + 3)z = 7\beta \end{cases}, \text{ 其中 } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

- (a) 假設 (E) 有唯一解。
- (i) 求 α 值的範圍。
- (ii) 以 α 及 β 表 y 。
- (b) 假設 $\alpha = -5$ 。若 (E) 不相容，求 β 值的範圍。

(7 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

8. 將 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 的圖像及 $y = -e^{-\frac{x}{2}}$ 的圖像分別記為 F 及 G ，其中 $x > 0$ 。設 P 為 F 上的一動點。通過 P 的鉛垂線與 G 相交於點 Q 。將 P 的 x 坐標記為 u 。通過 P 的水平線與 y 軸相交於點 R ，而通過 Q 的水平線與 y 軸相交於點 S 。已知長方形 $PQSR$ 的面積以每分鐘 e^2 平方單位的恆速率增加。求當 $u = 2$ 時

- (a) PR 的長度的變率，
- (b) 長方形 $PQSR$ 的周界的變率。

(7 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed for handwriting practice. Each set consists of a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

[illegible]

證明 $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ 。 (3 分)

(b) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(3 \tan x + \sqrt{3}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{12}{3 \tan x + \sqrt{3}}\right) dx$ 。

(c) 利用 (b)，證明 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(3 \tan x + \sqrt{3}) dx = \frac{\pi \ln 12}{6}$ 。(3 分)

(d) 計算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sec x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} dx$ 。

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

11. 設 m 、 n 及 k 均為實數使得 $m - n + 2k \neq 0$ 。定義 $A = \begin{pmatrix} m-k & m-n+k \\ k & n-k \end{pmatrix}$ 、

$$X = \frac{1}{-m+n-2k}(A-mI) \text{ 及 } Y = \frac{1}{m-n+2k}[A-(n-2k)I], \text{ 其中 } I \text{ 為 } 2 \times 2 \text{ 單位矩陣。}$$

- (a) 計算 XY 、 YX 及 $X + Y$ 。 (3 分)
- (b) 證明 $X^2 = X$ 及 $Y^2 = Y$ 。 (2 分)
- (c) 證明對所有正整數 p ， $A^p = (n - 2k)^p X + m^p Y$ 。 (3 分)

- (d) 計算 $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{2016}$ 。

[illegible]

Handwriting practice area with 20 horizontal dashed lines.

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of approximately 20 horizontal rows. Each row is defined by two parallel dashed lines, creating a series of uniform gaps for letter height. The lines are evenly spaced across the entire page, providing a guide for consistent letter formation. There is no text or other markings on the page.

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

12. 點 A 、點 B 、點 C 及點 D 的位置向量分別為 $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + m\mathbf{k}$ 、 $5\mathbf{i} + (m + 1)\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$ 、 $6\mathbf{i} + m\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$ 及 $11\mathbf{i} + (m + 2)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ，其中 $m \in \mathbf{R}$ 。假定 $\overrightarrow{AB}$ 垂直於 $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 。將包含 A 、 B 及 C 的平面記為 P ，並將一個垂直於 P 的單位向量記為 $\mathbf{v}$ 。

(a) 求

(i) m ,

(ii) $\mathbf{v} \circ$

(5 分)

(b) 設 E 為 D 在 P 上的投影。

(i) 求 $\overrightarrow{ED}$ 。

(ii) 求由 D 至 P 的最短距離。

(iii) 求 E 的位置向量。

(iv) E 是否 $\triangle ABC$ 的垂心？解釋你的答案。

(8 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dashed lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or drawing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

[illegible]